CEF NAC

Centro de Estudios Formativos

Evaluaciones Matemáticas (ADE)

Evaluación 1

Primer Parcial

1. En una panificadora se elaboran tres tipos de panes: hogaza, rosca y pan de cereales. Para la fabricación de los panes se utilizan dos factores productivos: harina y levadura. La fábrica dispone de 50 unidades de harina y de 10 unidades de levadura. La combinación de los ingredientes para elaborar cada tipo de pan es la que se indica en la siguiente tabla:

Producto / Factor	Hogaza	Rosca	Pan de Cereales
Harina	5	3	1
Levadura	2	3	4

Se pide:

a) Discutir la factibilidad de la producción cuando se agota la disponibilidad de los factores productivos.

b) Determinar cuántas unidades de cada tipo de pan pueden obtenerse (resolver por el método de la matriz inversa).

c) Formular el modelo de maximización de la producción.

d) Estudiar, razonadamente, si la solución obtenida en el apartado b) tiene estructura de espacio vectorial. En caso afirmativo, indicar la dimensión y dar una base del subespacio.

2.

2.1. Si A, B y C son matrices cuadradas de orden 4 y $\det(A) = 2$, $\det(B) = -1$, $\det(C) = 3$, resolver, aplicando las propiedades de los determinantes e indicando las propiedades utilizadas, las cuestiones que se indican a continuación:

a) $det(2A^t . B^t . C^t)$

b) $det[(A\,2\,C)^t]^{-2}$

c) $det(2C^{-1} . 2B . 2^{-1}A^2)$

d) $det(3B^{-1})$

2.2. Simplificar la expresión matricial siguiente, utilizando las propiedades que considere adecuadas:

$(AB)^{-1}\,A + [(B^t)^t]^{-1} - 2(AB)^{-1}\,A + (A+B)A^{-1}B^{-1} - B(BA)^{-1}$

3.

3.1. Sea $f : \Re^3 \to \Re$ la aplicación lineal dada por:

$f(x_1, y_2, z_3) = (2x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + 2x_3).$

Se pide obtener la matriz asociada a la aplicación lineal. Estudiar si dicha matriz es diagonalizable. En caso afirmativo, obtener la matriz de autovectores (matriz de paso) y la matriz diagonal semejante.

3.2. Sea $Q\colon \Re^3 \to \Re$ la forma cuadrática dada por:

$Q(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 + 2z^2$. Se pide:

3.2.1. Obtener la matriz asociada a la forma cuadrática. Clasificar la forma cuadrática obtenida.

3.2.2. Estudiar $Q(\bar{x})$ restringida al subespacio vectorial S y clasificarla:

$S = \{(x, y, z) \in \Re^3 / \; x + y + z = 0, x - y - 5z = 0\}$

Segundo Parcial

1. Sea $f(x,y)$ la función escalar definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{3x^6+2y^4} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 4 & si(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1.1. Estudiar, razonadamente, la continuidad de la función en el punto $\bar{x} = (0,0)$ en la dirección de cualquier vector $\bar{v}$.

1.2. Estudiar la continuidad de la función en el punto $\bar{x} = (0,0)$ en la dirección del vector $\bar{v} = (-2,1)$.

2. Dada la función de clase C^2 $\quad f(x,y,z) = xz^3 - 3x^2y^2$:

2.1. Aplicando el cálculo diferencial, calcular el valor aproximado de la función en el punto $\bar{x} = (1,1,2)$, si disminuyen en un 2% las variables x, e, z, y y aumenta en un $1\acute{5}\%$ la variable y.

2.2. Estudiar, razonadamente el comportamiento y la tendencia locales de la función en el punto $\bar{x} = (1,0,1)$ en la dirección del vector $\bar{v} = (0,1,-1)$.

3. Sea $f\colon \mathfrak{R}^3 \to \mathfrak{R}^2$ la función dada por $\ddot{f}(x,y,z) = \begin{bmatrix} e^{2xy+z} \\ \frac{y^2}{xz} \end{bmatrix}$. Obtener la matriz jacobina de la función en el punto $\bar{x} = (1,-1,1)$.

4. Sea $f(x,y)$ una función homogénea de grado $m = 3$.

Sean $f(3,6) = 9, \frac{\partial f}{\partial y}(3,6) = -8$. Se pide:

a) $f(1,2)$ $\qquad$ b) $6\frac{\partial f}{\partial x}(6,12) + 12\frac{\partial f}{\partial y}(6,12)$

c) $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},1\right)$ $\qquad$ d) $\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$

e) Enunciar las propiedades de las funciones homogéneas.

5. Una empresa produce un bien utilizando dos factores productivos, x e y. La función de costes es $C(x,y) = 4x + 5y$ y la función de producción es $Q(x,y) = x,y$.

5.1. ¿Qué cantidad de cada factor productivo se utilizará en la producción si la empresa desea maximizar la producción con un coste $40\ u.m$?

5.2. ¿Cómo se vería afectada la producción máxima si los costes aumentasen en $3\ u.m$? ¿le convendría a la empresa el aumento de los costes?

6.

6.1. En una economía simplificada la renta nacional Y_t viene expresada como: $Y_t = C_t + I_t$, donde C_t representa el consumo e I_t representa la inversión. Si $C_t = 2Y_{\_-1} - 8$, $\quad I_t = Y_{t-1} - 2Y_{t-2}$, obtener la expresión de la renta nacional sabiendo que $Y_0 = 80$, $y_1 = 100$. Estudiar el comportamiento de la variable renta nacional.

6.2. Resolver las cuestiones siguientes:

$a)\ \ y' = x - 5y \qquad b)\ \ \int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx \qquad c)\ \ \int \frac{e^x}{e^{2x}+4e^x-12}dx$

6.3. Sean las funciones de demanda y de oferta en un mercado que se supone perfecto en cualquier momento del tiempo:

$$\begin{array}{l} Q_d = 2P'' - 4P' + 5P \\ Q_x = P'' + 2P' - 3P + 2e^{-t} \end{array} \qquad \text{con} \ \ P(0) = \frac{5}{3} \ \ y \ \ P'(0) = \frac{4}{3}$$

Obtener la trayectoria temporal que describe el precio sabiendo que el mercado está en equilibrio ($Q_d = Q_x$).

Evaluación 2

1. Resolver las cuestiones siguientes:

1.1. Calcular los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{Ln(3x+1)}{e^{5x}+5}$ b) $\lim_{n\to 0} \frac{t\_(3x)(e^x-1)}{9sen^2(x)}$

1.2. Estudiar la continuidad de la función en el punto $\bar{x}=(-1,3)$ en la dirección del vector $\bar{v}=(2,1)$.

2. Una empresa dedicada a la fabricación de monopatines, se especializa en dos modelos, x e y. Su función de costes viene dada por: $C(x,y)=x^2+y^2$. Teniendo en cuenta que la empresa desea minimizar sus costes y que tiene que producir exactamente 25 unidades entre ambos modelos pero que por cada unidad de x debe producir dos unidades de y, se pide:

a) ¿Qué cantidad debe producir de cada modelo de monopatín para que el coste sea mínimo?

b) ¿A cuánto asciende el coste mínimo? Si la empresa pudiera aumentar la producción en ambos modelos en 4 unidades, ¿Cómo se vería afectada la función objetivo? ¿le convendría disponer de esa producción adicional?

3. Resolver las cuestiones siguientes:

3.1. Sea $f(x,y)$ una función homogénea de grado m. Además se sabe que:

$\frac{\partial f(2,3)}{\partial x}=7$, $\frac{\partial f(2,3)}{\partial y}=2$, $\frac{\partial f(4,6)}{\partial y}=16.$ Se pide que:

a) Calcula el grado de homogeneidad

b) $f\left(1,\frac{3}{2}\right)$

3.2. La expresión $\varphi(K,L)=2K^{-2}\,L+(8-2KL)^2+QKL^2=420$ define el factor capital (K) como función implícita del factor trabajo (L). Obtener la tasa marginal de sustitución de capital por trabajo, $\frac{dK}{dL}$, en un entorno del punto $(K=1,\ L=2)$.

4. Sea $f(x_1, x_2)$ la función de clase C^2 dada por $f(x_1, x_2) = 2x_2x_1^2 - e^{2x_1x_2-4}$.

a) Estudiar razonadamente, el comportamiento y la tendencia locales de la función en el punto $\bar{x} = (2,1)$ en la dirección del vector $\bar{v} = (-3,2)$.

b) Si se produce un aumento del 7% en la segunda variable y una disminución del 6% en la primera, ¿Cuál sería el valor de la diferencial total de la función en el punto $\bar{x} = (2,1)$?

5. Resolver las cuestiones siguientes:

5.1. Calcular sólo dos de las integrales siguientes:

a) $\displaystyle\int \frac{3-x}{3-3\sqrt{x}}dx$

b) $\displaystyle\int (2x+4)\, e^{2x+4}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2+1)x}dx$

5.2. Obtener la solución general de la ecuación completa de las ecuaciones siguientes:

a) $(x^2 + xy)dy - (y^2 + x^2)dx = 0$

b) $y_{t+2} - 3y_{t+\_} - 18y_t = (-4)^t$

5.3. Sean las funciones de demanda y de oferta en un mercado que se supone perfecto en cualquier momento del tiempo:

$Q_d = P^{II} + 4P^I + 13P$, $Q_d = -2P' + 4p + 3t$ con $P(0) = {}^7/_9$ y $\acute{P}(0) = {}^{16}/_3$. Obtener la trayectoria temporal que describe el precio sabiendo que el mercado está en equilibrio $Q_d = Q_5$.

Evaluación 3

1. Resolver las cuestiones siguientes:

1.1. Calcular los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{(-4x+2)}$ **b**) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6^x}{2x^2+5x-2}$

1.2. Sea $f(x,y)$ la función escalar definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy-2y^2}{x^2-2xy} & si\ (x,y)\neq(2,1)\\ -4 & si\ (x,y)=(2,1)\end{cases}$$

Estudiar la continuidad de la función en el punto $\bar{x}=(2,1)$ en la dirección del vector$\bar{v}=(1,-1)$.

2. Una empresa dedicada a la fabricación de ratones para ordenador, se especializa en dos modelos, x e y. Su función de beneficios viene dada por:

$B(x,y)=x^2+3xy+y^2$. Teniendo en cuenta que la empresa desea maximizar su beneficio y que tiene que producir exactamente 100 unidades entre ambos modelos, se pide:

a) ¿Qué cantidad debe producir de cada modelo de ratón para que el beneficio se máximo?

b) ¿A cuánto asciende el beneficio máximo? Si la empresa pudiera aumentar la producción entre ambos modelos en 5 unidades, ¿Cómo se vería afectada la función objetivo? ¿le convendría disponer de esa producción adicional?

3. Resolver las cuestiones siguientes:

3.1. Sea $f(x,y)$ una función homogénea de grado m. Además se sabe que:

$\frac{\partial f(1,3)}{\partial x}=8$, $\frac{\partial f(1,3)}{\partial y}=-3$, $\frac{\partial f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}{\partial x}=2$. Se Pide

a) Calcular el grado de homogeneidad.

b) $f(2,6)$

3.2. La expresión $\varphi(K,L)=2KL^2-(4KL-6)^2+QK^2L^{-2}=116$ define al factor capital (K) como función implícita del factor trabajo (L). Obtener la tasa marginal de sustitución de capital por trabajo, $\frac{dK}{dL}$, en un entorno del punto $(K = 2, L = 2)$.

4. Sea $f(x_1, x_2)$ la función de clase C^2 dada por $f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2 - 3} + 3x_1^2 x_2$.

a) Estudiar razonadamente, el comportamiento y la tendencia locales de la función en el punto $\bar{x} = (1,3)$ en la dirección del vector $\bar{v} = (1, -3)$.

b) Si se produce un aumento del 4% en la primera variable y una disminución del 5% en la segunda, ¿Cuál sería el valor de la diferencial total de la función en el punto $\bar{x} = (1,3)$?

5. Resolver las cuestiones siguientes:

5.1. Calcular sólo dos de las integrales siguientes:

a) $\int \frac{x+2}{2\sqrt{x}+2} dx$ b) $\int Ln(3x) dx$ c) $\int \frac{4x-3}{2x^2-3x-14} dx$

5.2. Obtener la solución general de la ecuación completa de las ecuaciones siguientes:

a) $y' - 2y = e^{-3x}$ b) $y_t - 5y_{t-1} - 36y_{t-2} = 4t - 2$

5.3. Sean las funciones de demanda y de oferta en un mercado que se supone perfecto en cualquier momento del tiempo:

$Q_d = P^{II} - 3P^I - 2p$, $Q_5 = 5P^I - 18P + e^{-1}$ con $P(0) = {}^{6}/_{25}$ y $\acute{P}(0) = {}^{-6}/_{25}$

Obtener la trayectoria temporal que describe el precio sabiendo que el mercado está en equilibrio $Q_d = Q_5$.

Evaluación 4

1. Una refinería utiliza dos tipos de petróleo: petróleo ligero y petróleo pesado, para producir tres productos: gasolina, queroseno y bencina. La tabla adjunta expresa los barriles de cada producto que obtiene por cada barril de petróleo:

Si se dispone de 50 barriles de petróleo ligero y 40 barriles de petróleo pesado.

Se pide:

	Gasolina	**Queroseno**	**Bencina**
Petróleo ligero	5	3	1
Petróleo pesado	2	3	4

a) Formular el modelo lineal de maximización de la producción.

b) Discutir el sistema de ecuaciones lineales que estudia la factibilidad de la producción cuando se agota la disponibilidad de los factores productivos.

c) Determinar cuántas unidades de cada producto se podrían obtener (resolver por el método de la matriz inversa).

d) Estudiar **razonadamente** si la solución obtenida en el apartado c) tiene estructura de subespacio vectorial. En caso afirmativo, indicar su dimensión y obtener una base del mismo.

2. Sea M_{2x2} el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden 2 y sea S el subconjunto formado por las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & -a+3b \\ -b & 5a+7b \end{pmatrix}$$

Estudiar si S es un subespacio vectorial de M_{2x2} y en caso afirmativo calcular su dimensión y dar una base del mismo.

3. Resolver las cuestiones que se indican en cada caso:

3.1. Si A, B y C son tres matrices cuadradas de orden, siendo:

$det(A) = -2, \det(B) = 4$ y $det(C) = -1$

Calcular, aplicando las propiedades de los determinantes, dos de las expresiones siguientes:

a) $det([(AB)^t C]^{-1})$
b) $det(3A^t B^{-1} C).det(C^{-1})$
c) $det(3(BC)^{-1}(AB)^t)$

3.2. Sean A, B, X, Y matrices regulares del mismo orden. Sea I la matriz identidad. Sean X, Y las matrices incógnitas. Resolver el sistema matricial:

$\begin{cases} XBY = A^{-1} \\ AYB = B \end{cases}$ Sabiendo que: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

4. Sea $f: \square^3 \to \square^3$ la aplicación lineal dada por,

$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_3, 0_1 - x_1 + x_2 - 2x_3)$

4.1. Obtener la matriz asociada a la aplicación lineal.

4.2. Estudiar razonadamente si la matriz obtenida en el apartado anterior es diagonalizable. En caso afirmativo, obtener la matriz de los autovalores (P) y la matriz diagonal semejante (D).

4.3. ¿Qué relación hay entre las matrices de los apartados anteriores?

5. Dada la siguiente forma cuadrática $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2yz + 2xz$ se pide:

5.1. Obtener la expresión matricial de la forma cuadrática.

5.2. Clasificarla

5.3. Clasificar la forma restringida al subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \square^3 | x - 2y = 0\}$

Evaluación 5

1. Resolver las siguientes cuestiones:

1.1. Calcular dos de los siguientes límite:

a) $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{2(e^x-1)sen(x)}{tg^2(3x)}$

c) $\lim\limits_{n\to 1} \dfrac{2x^2+x-3}{x-1}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{5x}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[x]{\dfrac{1}{x+2}}$

1.2. Sea $f(x,y)$ la función escalar definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2y^4+(x-y^2)^2} & xsi\ (x,y)\neq(0,0)\\ 4 & xsi\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Averiguar las direcciones en las que sea continua en el punto $x=(0,0)$.

b) Estudiar la continuidad en el punto $x=(0,0)$ y en la dirección del vector $v=(-1,2)$.

2. La función de producción de una empresa manufacturera viene dada por $Q(x,y)=xy$, donde x e y son las cantidades de factor trabajo y factor capital respectivamente, que utiliza en la producción. La empresa dispone de un total de 24 u.m. para la adquisición de los factores productivos, siendo 2 u.m. y 3u.m., respectivamente, el coste unitario de dichos factores.

2.1. Encontrar las cantidades de factor capital respectivamente, que utiliza en la producción.

2.2. Si dispusiera de un 25 u.m. para la adquisición de los factores, ¿aumentaría o disminuiría su producción?

3. Resolver las cuestiones que se indican en cada caso:

3.1. La función $f(x,y)$ es homogénea de grado 4. Además sabemos que $f(1,3)=3$ y que $\frac{\partial f}{\partial y}(1,3)=5$. Calcular:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{1}{3},1\right)$ b) $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial y}{\partial x}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{3}{2}\dfrac{\partial y}{\partial x}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

3.2. Siendo $e^{-y}\cos(x+y)+L(xy+1)=-1$ la ecuación que define implícitamente a la magnitud y como función implícita de la variable x en un entorno del punto $(\pi,0)$. Calcular la derivada de la función implícita $\frac{dy}{dx}$.

4. Sea $f(x,y)$ la función de clase C^2 dada por $f(x,y)=xe^{\frac{y}{x}}$. Estudiar <u>razonadamente</u>, el comportamiento y la tendencia locales de la función en el punto $x=(1,0)$ en la dirección del vector $\bar{v}=(1,-3)$.

5. Resolver las cuestiones siguientes:

5.1. Calcular sólo dos de las integrales siguientes:

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int x.Ln\left(\frac{6}{x}\right)dx$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$

5.2. En una economía simplificada la renta nacional Y_t viene expresada por:

$Y_t=C_t+I_t$ Donde C_t representa el consumo e I_t, la inversión. Si $C_t=2Y_{t-1}+3^t$ e $I_t=2Y_{t-1}-2Y_{t-2}$, obtener la expresión general de la renta nacional.

5.3. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial:

$y"-7y'+10y=28e^{-2x}$ Donde $y(0)=0$ e $\acute{y}(0)=-17/2$.